Operátorfélcsoportok perturbációja

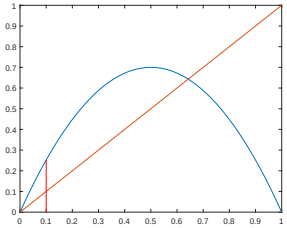
Sike András

Operátorfélcsoportok előadás

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2024. November 27.

EÖTVÖS LORÁND
UNIVERSITY | BUDAPEST



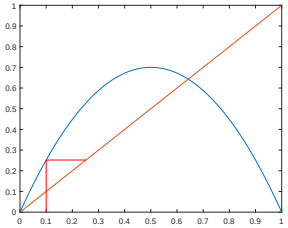
Motiváció

Kérdés. Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora és $(B, \mathcal{D}(B))$ ugyanazon X Banach-tér feletti operátor. Mikor mondhatjuk, hogy $A + B$ operátor egy $(S(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora?

• Legyen $\mathcal{D}(A)$ valódi, sűrű ($\Rightarrow$ nem zárt) altér, $B := -A$. Ekkor $A + B = 0$, $\mathcal{D}(A)$ altéren definiálva, azaz nem lehet generátor.

• Legyen most $B := -2A$. Világos, hogy $(A+B, \mathcal{D}(A+B)) = (-A, \mathcal{D}(A))$, ami pontosan akkor generátor, ha A egy **csoport** generátora.

• Lehetséges, hogy $(B, \mathcal{D}(B))$ generátor, viszont $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$.



Korlátos-perturbáció-tétel

Tétel. Legyen $(A, \mathcal{D}(A) \subset X) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ olyan erősen folytonos félcsoport, hogy alkalmas $M \geq 1, w \in \mathbb{R}$ esetén

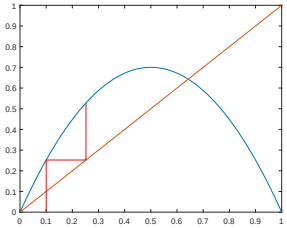
$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \qquad \forall\ t \geq 0,$$

továbbá $B \in \mathcal{L}(X)$. Ekkor

$$C := A + B, \qquad \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(A)$$

is egy $(S(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos operátorfélcsoport generátora, amelyre

$$\|S(t)\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t} \qquad \forall\ t \geq 0.$$



Bizonyítás, első lépés

Tegyük fel, hogy $\mathbf{w = 0}$, $\mathbf{M = 1}$, és legyen $\lambda > 0$ ($\Rightarrow \quad \lambda \in \varrho(A)$) tetszőleges. Ekkor

$$\lambda I - C = \lambda I - A - B = (I - BR(\lambda, A))(\lambda I - A).$$

$\lambda I - A$ bijektív, azaz $\lambda I - C$ pontosan akkor bijektív (vagyis $\lambda \in \varrho(C)$), ha $I - BR(\lambda, A)$ is invertálható. Ezek alapján

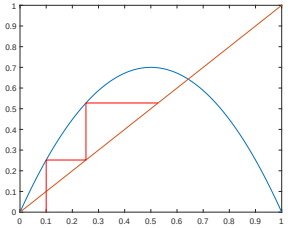
$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}.$$

Legyen λ továbbá olyan, hogy $\Re(\lambda) > \|B\|$. A Hille-Yoshida-tétel alapján

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq \frac{\|B\|}{\Re(\lambda)} < 1,$$

tehát $\lambda = \varrho(C)$ és

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n.$$



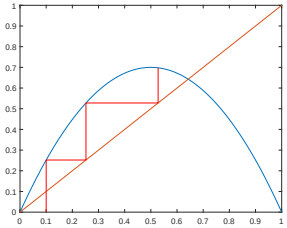
Bizonyítás, első lépés folyt.

C rezolvensének normájára fennáll az alábbi becslés *(mivel feltettük, hogy* $\Re(\lambda) > \|B\|$*)*:

$$\|R(\lambda, C)\| \leq \frac{1}{\Re(\lambda)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|B\|}{\Re(\lambda)}} = \frac{1}{\Re(\lambda) - \|B\|}.$$

Szintén a Hille-Yosida-tételből következik, hogy C egy olyan erősen folytonos $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot generál, amelyre

$$\|S(t)\| \leq e^{\|B\|t} = e^{(0+1\cdot\|B\|)t} \qquad \forall\ t \geq 0,$$



Bizonyítás, második lépés

$w = 0$ továbbra is feltehető, mivel a félcsoport tetszőleges $w \in \mathbb{R}$ és $M \geq 1$ esetén átskálázható ilyenné. ($\Rightarrow \|T(t)\| \leq M$ minden t mellett)

$$\|x\|_{\sup} := \sup_{t \geq 0} \|(T(t))(x)\|, \qquad \|x\| \leq \|x\|_{\sup} \leq M \|x\|$$

ekvivalens normában mérve $(T(t))_{t \geq 0}$ kontrakció-félcsoport, illetve a jobb oldali becslésekből tetszőleges x elemre

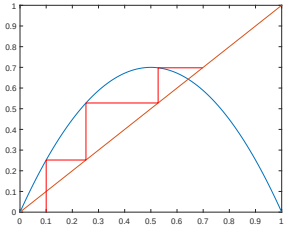
$$\|Bx\|_{\sup} \leq M \|B\| \cdot \|x\| \leq M \|B\| \cdot \|x\|_{\sup}.$$

A bizonyítás első része analóg elvégezhető, amiből adódik, hogy C egy erősen folytonos $(S(t))_{t \geq 0}$ félcsoportot generál, ami teljesíti a

$$\|S(t)\|_{\sup} \leq e^{\|B\|_{\sup} t} \leq e^{M\|B\| t}$$

becslést. Az eredeti normában mérve pedig éppen a tétel állítását kapjuk vissza:

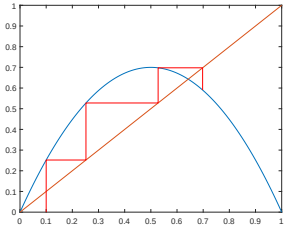
$$\|(S(t))(x)\| \leq \|(S(t))(x)\|_{\sup} \leq e^{M\|B\| t} \|x\|_{\sup} \leq M e^{(0+M\|B\|)t} \cdot \|x\| \quad \blacksquare$$



A generátor előállítása

Következmény. Legyen $(A, \mathcal{D}(A) \subset X) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, $B \in \mathcal{L}(X)$, és $(S(t))_{t\geq 0}$ a $C := A + B$ által generált erősen folytonos félcsoport. Ekkor minden $x \in X$ és $t \geq 0$ esetén

$$(S(t))(x) = (T(t))(x) + \int_0^t (T(t-s)BS(s))(x)ds$$



Bizonyítás

Legyen $x \in \mathcal{D}(A)$, és definiáljuk

$$\xi_x : [0, t) \to X, \qquad \xi_x(s) := (T(t-s)S(s))(x)$$

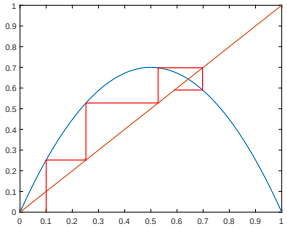
függvényt. s szerint deriválva

$$\frac{\partial}{\partial s}\xi_x(s) = (T(t-s)CS(s))(x) - (T(t-s)AS(s))(x) = (T(t-s)BS(s))(x);$$

$$(S(t))(x) - (T(t))(x) = \xi_x(t) - \xi_x(0) = \int_0^t \xi_x'(s)ds = \int_0^t (T(t-s)BS(s))(x)ds$$

Tetszőleges $x \in X$ esetén az egyenlőség az operátorok korlátossága és $\mathcal{D}(A)$ sűrű volta nyomán adódik.

■



Megjegyzések a következményhez

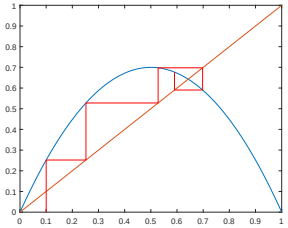
- A fenti helyett a

$$\xi_x(s) := (S(s)T(t-s))(x)$$

függvényt is használhattunk volna, ekkor az alábbi előállítást lehet levezetni:

$$(S(t))(x) = (T(t))(x) + \int_0^t (S(s)BT(t-s))(x)ds$$

- Az egyszerűbb kezelhetőség kedvéért az egyenletet operátoregyenlet alakjába írjuk, ehhez függvénytér:
  - $\mathcal{X}_{t_0} := C([0,t_0],\mathcal{L}(X))$
  - $\|F\|_\infty := \sup_{s\in[0,t_0]} \|F(s)\|$
  - Állítás: $(\mathcal{X}_{t_0}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér.



Absztrakt Volterra-operátor

Definíció. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, $B \in \mathcal{L}(X)$. Ekkor tetszőleges $t_0 > 0$ esetén a

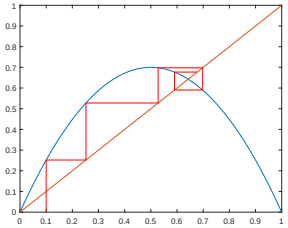
$$V = V_{(t_0,B)} : \mathcal{X}_{t_0} \to \mathcal{X}_{t_0}, \quad ((VF)(t))(x) := \int_0^t (T(t-s)BF(s))(x)ds$$

képlettel definiált operátor a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz és a B operátorhoz tartozó *absztrakt Volterra-operátor*.

Lemma. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, $B \in \mathcal{L}(X)$, és V a hozzájuk tartozó absztrakt Volterra-operátor. Ekkor $V \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_{t_0})$, és minden $n \in \mathbb{N}$ mellett fennáll a

$$\|V^n\| \leq \frac{(M\|B\|t_0)^n}{n!} \qquad M := \sup_{s\in[0,t_0]} \|T(s)\|$$

becslés, így V spektrálsugara $r(V) = 0$.



Az operátoregyenlet-alak

• A lemma következményeként $1 \in \varrho(V)$, továbbá érvényes az alábbi Neumann-sorfejtés:

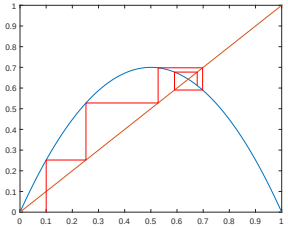
$$R(1, V) = (I - V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} V^n.$$

• Ekkor az első alakban felírt integrálegyenlet az alábbi operátoregyenletté írható át:

$$T(\cdot) = (I - V)S(\cdot) \qquad T(\cdot), S(\cdot) \in \mathcal{X}_{t_0},$$

így $(S(t))_{t \geq 0}$ félcsoportot tetszőleges $t \in [0, t_0]$-ra való átírással előállíthatjuk az ($\mathcal{X}_{t_0}$ térben konvergens) alábbi sor segítségével:

$$S(\cdot) = R(1, V)\, T(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n\, T(\cdot).$$



A Dyson-Phillips-sor

Tétel. Legyen $(S(t))_{t\geq 0}$ az $A+B$ operátor által generált félcsoport, ahol $(A,\mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos, $B\in\mathcal{L}(X)$. Ekkor

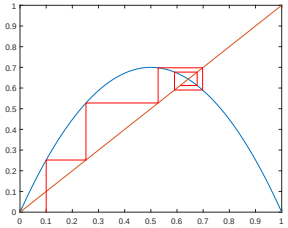
$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n(t),$$

ahol $S_0(t)=T(t)$ és

$$S_{n+1}(t) := VS_n(t) = \int_0^t T(t-s)BS_n(s)ds.$$

- A fenti sor $\mathcal{L}(X)$ operátornormájában konvergens
- Az előző lemmában $t_0\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges, így $I\subset\mathbb{R}^+$ kompakt intervallumokon

a konvergencia egyenletes.

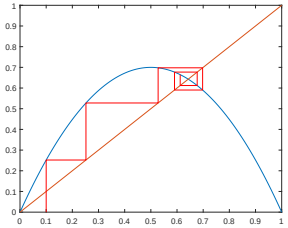


Kvalitatív összehasonlítás 1.

Következmény. Legyenek $(T(t))_{t\geq 0}$ *(eredeti)* és $(S(t))_{t\geq 0}$ *(perturbált)* erősen folytonos operátorfélcsoportok. Ekkor létezik olyan $M \geq 0$ konstans, hogy $t \in [0,1]$ esetén

$$\|T(t) - S(t)\| \leq tM.$$

$$\begin{aligned} \|(T(t))(x) - (S(t))(x)\| &\leq \int_0^t \|(T(t-s)BS(s))(x)\|\, ds \leq \\ &\leq t \sup_{r\in[0,1]} \|T(r)\| \cdot \sup_{s\in[0,1]} \|B\| \cdot \|x\| \qquad \blacksquare \end{aligned}$$



Kvalitatív összehasonlítás 2.

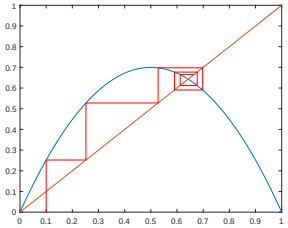
Állítás. Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos operátorfélcsoport, $B \in \mathcal{L}(X)$. Ekkor

a) Ha $(T(t))_{t\geq 0}$ analitikus, akkor $((A+B), \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (S(t))_{t\geq 0}$ is az;

b) Ha A kompakt rezolvensű, akkor $A+B$ is az.

b) következik abból, hogy $R(\lambda, A)$ kompakt, $(I - BR(\lambda, A))^{-1}$ korlátos, és megmutattuk, hogy

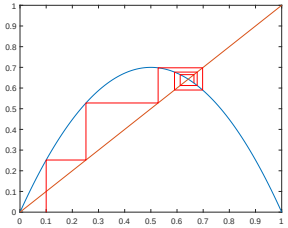
$$R(\lambda, A+B) = R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}.$$



Bizonyítás.

- Meggondolható, hogy ha A analitikus félcsoportot generál, akkor létezik $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$, amellyel $e^{\pm i\vartheta}A$ operátorok egy-egy erősen folytonos félcsoport generátorai;
- A korlátos-perturbáció-tétel szerint $e^{\pm i\vartheta}(A+B)$ is félcsoportot generál;
- Létezik olyan $\omega > 0$, hogy $e^{\pm i\vartheta}(A+B-\omega I)$ operátorok korlátos félcsoportot generálnak;
- Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy $A+B-\omega I$ korlátos analitikus félcsoportot generál;
- Korábbi állításból következik, hogy $A+B$ is analitikus félcsoportot generál.

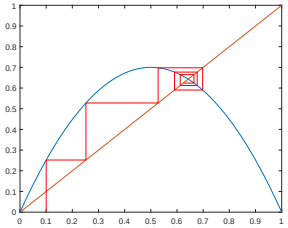
■



Két következmény

Állítás. Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ normafolytonos *(vagy kompakt)* félcsoport, B kompakt operátor. Ekkor az $A+B$ operátor által generált $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoport is normafolytonos *(ill. kompakt)*.

Állítás. Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ azonnal normafolytonos *(vagy azonnal kompakt)* félcsoport, $B \in \mathcal{L}(X)$. Ekkor az $A+B$ operátor által generált $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoport is azonnal normafolytonos *(ill. azonnal kompakt)*.



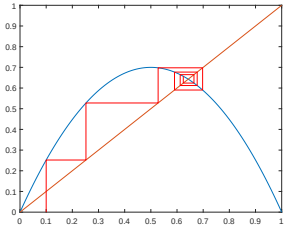
A-korlátos operátorok

Definíció. Legyen $(A, \mathcal{D}(A))$ lineáris operátor. Az mondjuk, hogy $(B, \mathcal{D}(B))$ operátor *(relatív) A-korlátos*, ha $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ és valamilyen $a, b > 0$ konstansok mellett fennáll az alábbi becslés:

$$\|Bx\| \leq a\,\|Ax\| + b\,\|x\| \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

A B operátor *A-korlátja*

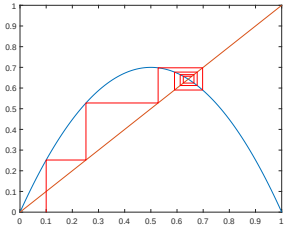
$$a_0 := \inf\{a \geq 0 : \exists\ b > 0 : \textit{fenti egyenlőség teljesül}\}.$$



A-korlátos perturbációk.

Tétel. Legyen $(A, \mathcal{D}(A))$ egy kontrakció-félcsoport generátora, $(B, \mathcal{D}(B))$ operátor disszipatív, A-korlátos $a_0 < 1$ A-korláttal. Ekkor $(A + B, \mathcal{D}(A))$ is kontrakció-félcsoportot generál.

Tétel. Legyen $(A, \mathcal{D}(A))$ egy analitikus félcsoport generátora. Ekkor létezik olyan $\alpha > 0$ szám, hogy minden olyan B A-korlátos operátor esetén, amelynek A-korlátja $a_0 < \alpha$, az $(A + B, \mathcal{D}(A))$ operátor is analitikus félcsoportot generál.



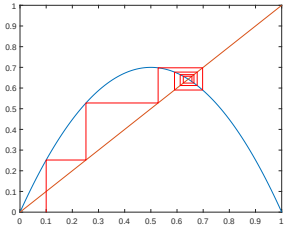
A-kompakt operátorok

Definíció. Legyen $(A, \mathcal{D}(A))$ zárt operátor X Banach-téren. Azt mondjuk, hogy $(B, \mathcal{D}(B))$ operátor *(relatív) A-kompakt*, ha $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, és $B : X_1^A \to X$ kompakt, ahol $X_1^A = (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ a gráf-normával ellátott $\mathcal{D}(A)$ Banach-tér.

Tétel. Legyen $(A, \mathcal{D}(A))$ egy erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren. Ha X reflexív, vagy B lezárható, akkor az alábbiak teljesülnek:

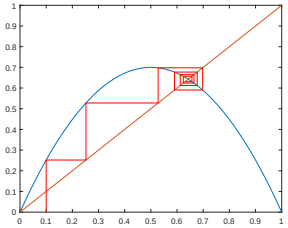
a) Ha A és B disszipatív, akkor $(A + cB, \mathcal{D}(A))$ kontrakció-félcsoportot generál X-en minden $c > 0$ esetén;

b) Ha az A által generált félcsoport analitikus, akkor $(A + zB, \mathcal{D}(A))$ analitikus félcsoportot generál minden $z \in \mathbb{C}$ esetén.



Motiváció

- Eddig a Hille-Yosida tételből indultunk ki, és ezzel kezelhetőek voltak az alábbi esetek:
  - Korlátos B perturbáló operátor;
  - Kontraktív, vagy analitikus $(T(t))_{t\geq 0}$ perturbálandó félcsoport.
- Sajnos ezek a feltételek a gyakorlatban túl erősek, gyengébb esetekben is szeretnénk perturbációkat vizsgálni.
- Ötlet: tekintsük az integrálegyenletes alakokat. Menetrend:
  - Megfelelő háttér (Szoboljev-tornyok) bevezetése;
  - Az első alakot használjuk (Desch-Schappacher-perturbáció);
  - A második alakot használjuk (Miyadera-Voigt-perturbáció).



Absztrakt Szoboljev-terek

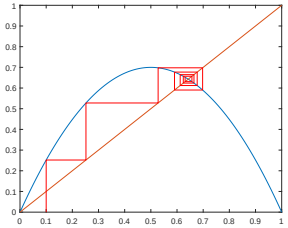
Definíció. Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ olyan erősen folytonos félcsoport, melyre $\omega_0 > 0$. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathcal{D}(A)$ esetén legyenek

$$\|x\|_n := \|A^n x\| \quad \text{ill.} \quad X_n = X_n^A := \left(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_n\right)$$

a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz tartozó n-edik Szoboljev-tér, és legyenek a megszorítások jelölései

$$T_n(t) := T(t)\big|_{X_n}.$$

- $\omega_0 > 0$ 'ingyenes' feltétel, mivel a félcsoport átskálázható ilyenné;
- $\omega_0 > 0$ következményeként létezik $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.



Fontos tulajdonságok

Állítás. A fenti módon definiált terek és operátorok teljesítik az alábbiakat:

a) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén X_n Banach-tér;

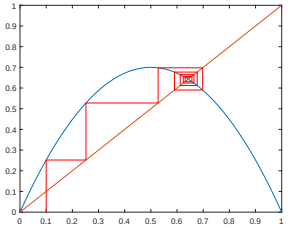
b) $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X_n-en;

c) $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport A_n generátora az A operátor része X_n-en:

$$\mathcal{D}(A_n) = \{x \in X_n : Ax \in X_n\} = \mathcal{D}(A^{n+1}) = X_{n+1};$$

$$A_n x = Ax \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A_n).$$

Bizonyítást csak az $n = 1$ esetre végezzük el, innen teljes indukció.



Bizonyítás

a) A zárt operátor $\Rightarrow (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ Banach-tér. Elég: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_A$:

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\| = \left\|A^{-1}Ax\right\| + \|Ax\| \leq \left(\left\|A^{-1}\right\| + 1\right) \cdot \|x\|_1 \leq \left(\left\|A^{-1}\right\| + 1\right) \cdot \|x\|_A .$$

b) $\mathcal{D}(A) = X_1$ minden t esetén $T(t)$-invariáns. $T_1(t)$ korlátos:

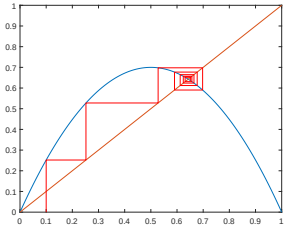
$$\|T_1(t)x\|_1 = \|AT(t)x\| = \|T(t)Ax\| \leq \|T(t)\| \cdot \|x\|_1 \quad \forall\, x \in X_1,$$

azaz $(T_1(t))_{t\geq 0}$ félcsoport X_1-en. Erős folytonosság:

$$\|T_1(t)x - x\|_1 = \|T(t)Ax - Ax\| \to 0 \quad t \to 0,\ x \in X_1.$$

c) vö.: megszorított félcsoportok konstrukciója.

■



1. ábra.

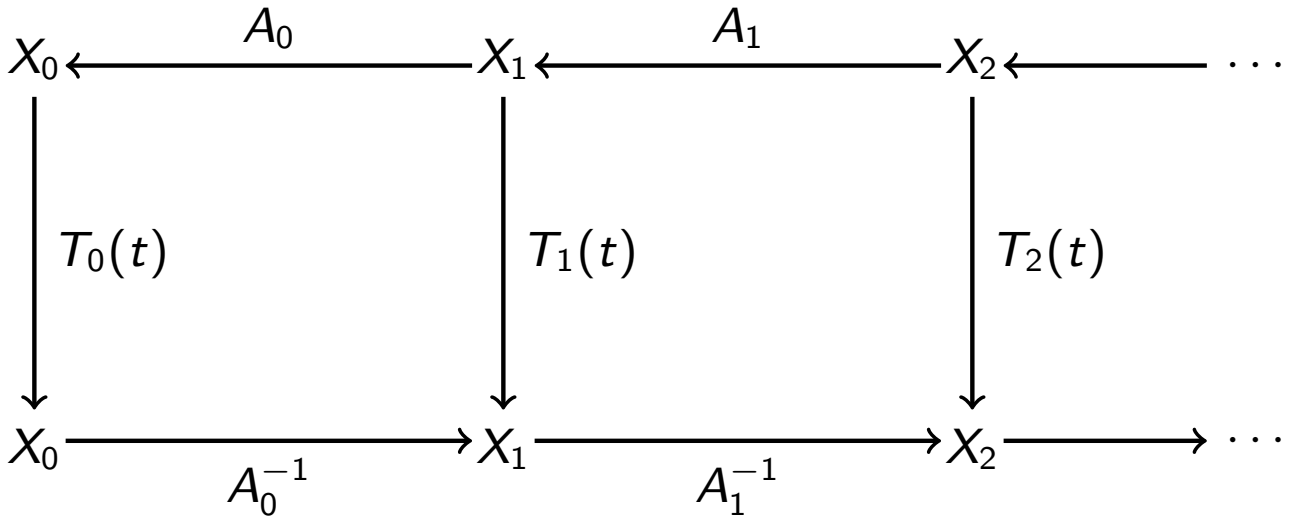
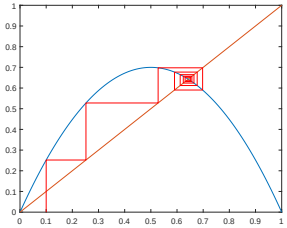


Figure: A $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz tartozó Szoboljev-terek, $n \in \mathbb{N}$

$$X_1 = \left(\mathcal{D}(A_0), \|\cdot\|_1\right), \quad \text{illetve} \quad X_2 = \left(\mathcal{D}(A_1), \|\cdot\|_2\right) = \left(\mathcal{D}(A_0^2), \|\cdot\|_2\right)$$

.



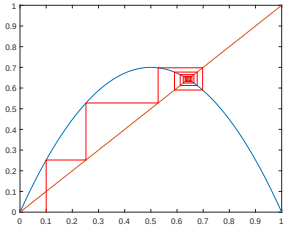
Következmények

- Bevezethetőek $X_0 := X$, $T_0(t) := T(t)$, $A_0 := A$ kiterjesztések;
- $A_n : X_{n+1} \to X_n$ izometria;
- $X_{n+1} \subset X_n$ sűrű altér, sőt, A_n által izometrikusan izomorf;
- Hasonlóan, $(T_{n+1}(t))_{t\geq 0}$ a $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoport megszorítása, ráadásul hasonló:

$$(T_{n+1}(t)) = A_n^{-1} T_n(t) A_n = T_n(t)\big|_{X_n};$$

- $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoportok pl. spektrumai, spektrálkorlátjai, növekedési korlátjai egybeesnek;
- Sűrűség miatt X_n definiálható X_{n+1} segítségével: tegyük teljessé $\left(X_n, \|\cdot\|_n\right)$ teret, ahol

$$\|x\|_n := \left\|A_{n+1}^{-1} x\right\|_{n+1}$$

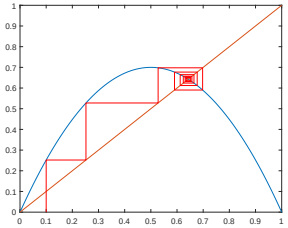


Kiterjesztés

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $\left(X_{-n+1}, \|\cdot\|_{-n+1}\right)$ teret és $\left(T_{-n+1}(t)\right)_{t\geq 0}$ félcsoportot már definiáltuk. Ekkor definiálja

$$\|x\|_{-n} := \left\|A_{-n+1}^{-1}x\right\|_{-n+1}, \quad \text{ill.} \quad X_{-n} := \overline{\left(X_{-n+1}, \|\cdot\|_{-n}\right)}$$

a $\left(T(t)\right)_{t\geq 0}$ félcsoporthoz tartozó $(-n)$-edrendű Szoboljev-teret. Továbbá definiáljuk $\left(T_{-n}\right)_{t\geq 0}$-t mint a $\left(T_{-n+1}(t)\right)_{t\geq 0}$ félcsoport folytonos kiterjesztése X_{-n}-re, és $A_{-n} :\rightsquigarrow \left(T_{-n}\right)_{t\geq 0}$



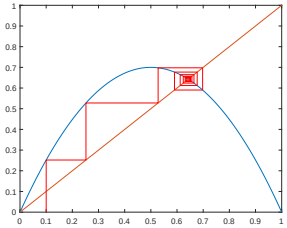
Fontos tulajdonságok, II.

Tétel. A fenti módon definiált terek és operátorok teljesítik az alábbiakat minden $m \geq n$, $m, n \in \mathbb{Z}$:

a) X_n Banach-tér, és ez sűrűn tartalmazza X_m-et;

b) $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X_n-en;

c) $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport A_n generátorára $\mathcal{D}(A_n) = X_{n+1}$, és A_n megkapható az $A_m : X_{m+1} \to X_m$ operátor egyértelmű folytonos kiterjesztéseként.



2. ábra.

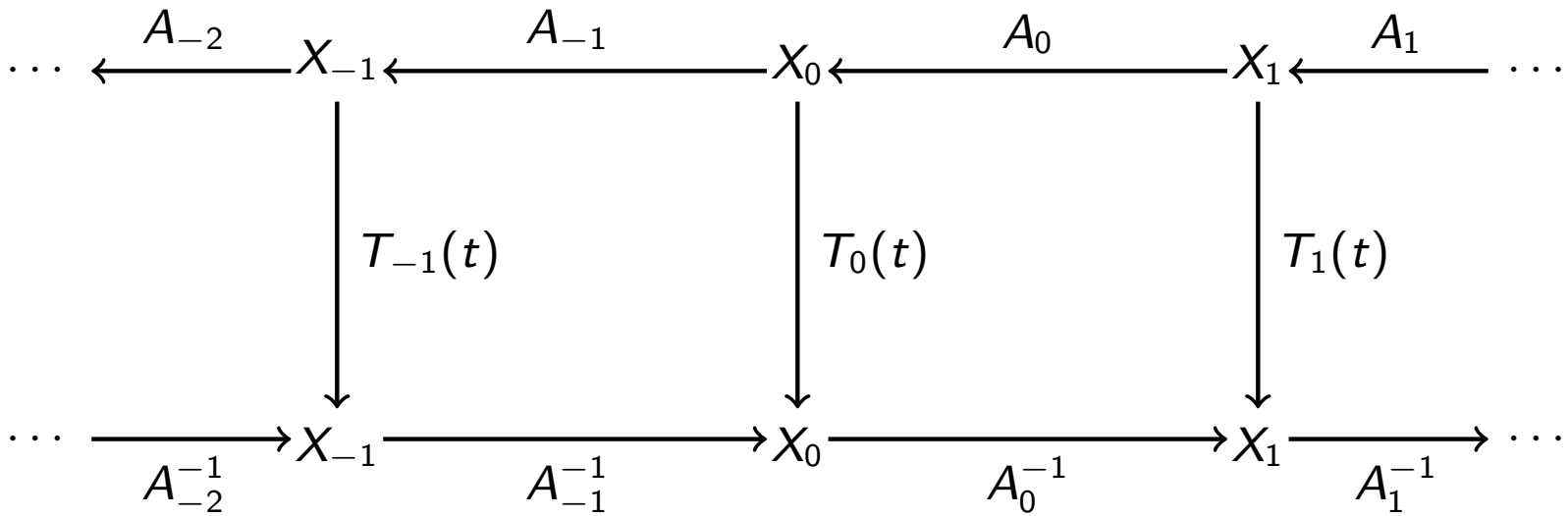
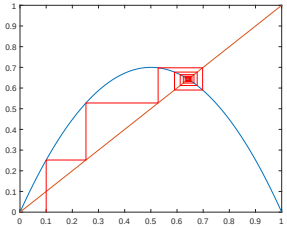


Figure: A $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz tartozó Szoboljev-torony

$$X_{-1} = \overline{(X_0, \|\cdot\|_1)}, \quad \text{illetve} \quad X_1 = (\mathcal{D}(A_0), \|\cdot\|_1)$$

.



Emlékeztető

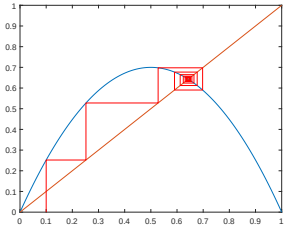
- Bevezettük a $\left(\mathcal{X}_{t_0}, \|\cdot\|_\infty\right)$ Banach-teret, ahol

$$\mathcal{X}_{t_0} := C\left([0, t_0], \mathcal{L}_s(X)\right), \quad \text{és} \quad \|F\| := \sup_{s\in[0,t_o]} \|F(s)\|.$$

- Ha most adott $(T(t))_{t\geq 0}$, X Banach-téren értelmezett félcsoporthoz az előző módon extrapolálunk $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot és X_{-1} Banach-teret, akkor egy $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$ operátor esetén definiálhatjuk az absztrakt Volterra-operátort:

$$V_B : \mathcal{X}_{t_0} \to \mathcal{X}_{t_0}, \quad (V_B F)(t) := \int_0^t T_{-1}(t-s)BF(s)ds \ \in \mathcal{L}(X, X_{-1}).$$

- Amennyiben $t \in [0, t_0]$, akkor az integrál bármilyen $F \in \mathcal{X}_{t_0}$ esetén pontonként konvergens X_{-1} téren.



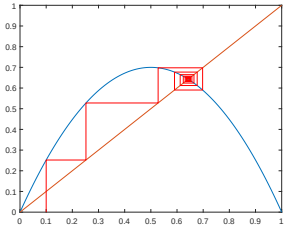
Perturbáló operátorok halmaza

Szükségünk lesz a következő tulajdonságok teljesülésére: Bármilyen $F \in \mathcal{X}_{t_0}$ esetén

1. $\mathcal{R}((V_B F))(t) \subset X, \quad \forall\ t \in [0, t_0]$;
2. $\forall x \in X : [0, t_0] \ni t \mapsto [(V_B F)(t)](x)$ folytonos;
3. V_B korlátos $\mathcal{X}_{t_0}$-on, sőt, $\|V_B\| < 1$.

Definíció. Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X Banach-tér felett. Ekkor a fenti három tulajdonságot teljesítő operátorok halmaza

$$\mathcal{S}^{\mathrm{DS}}_{t_0} := \{B \in \mathcal{L}(X, X_{-1}) : V_B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_{t_0}), \|V_B\| < 1\}.$$

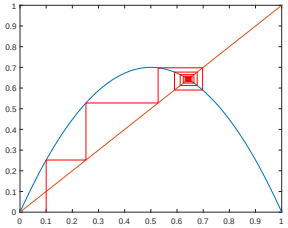


Perturbáció $\mathcal{S}^{\mathrm{DS}}_{t_0}$-beli operátorokkal

Tétel. $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X Banach-tér felett, és B olyan, hogy valamilyen t_0 mellett $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{DS}}_{t_0}$ fennálljon. Ekkor

$$(A_{-1} + B)\big|_X, \quad \mathcal{D}\left((A_{-1} + B)\big|_X\right) := \{x \in X : A_{-1}x + Bx \in X\}$$

is erősen folytonos félcsoportot generál X-en.



A generált félcsoport előállítása

Következmény. Ha a fenti tételben $\left((A_{-1}+B)\big|_X\right) \rightsquigarrow (S(t))_{t\geq 0}$, akkor érvényes

a) a konstansvariációs formula, vagyis tetszőleges $t \geq 0$ mellett (pontonként):

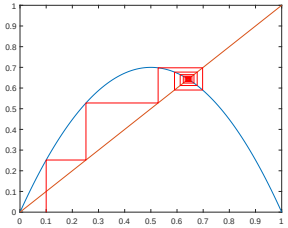
$$S(t) = T(t) + \int_0^t T_{-1}(t-s)BS(s)ds;$$

b) a Dyson-Philips-sorelőállítás: ha $S_0(t) = T(t)$ és

$$S_{n+1}(t) = V_B S_n(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)BS_n(s)ds,$$

akkor

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) \quad \forall\ t \in [0, t_0]\,.$$



A feltételek ellenőrzése

Következmény. Legyen $A, (T(t))_{t\geq 0}, X$ a korábbiaknak megfelelo, és $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$. Ha léteznek $t_0 > 0$ és $q \in [0,1)$ számok, hogy tetszőleges $f \in C([0,t_0], X)$ esetén

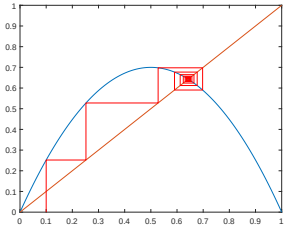
$$\int_0^{t_0} T_{-1}(t_0-s)Bf(s)ds \in X, \quad \text{ill.} \quad \left\| \int_0^{t_0} T_{-1}(t_0-s)Bf(s)ds \right\| \leq q \|f\|_\infty ,$$

akkor $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{\mathrm{DS}}$.

Következmény. Ha létezik $t_0 > 0$ szám, hogy valamilyen $p \in [1,\infty)$ mellett tetszőleges $f \in L^p([0,t_0], X)$ esetén

$$\int_0^{t_0} T_{-1}(t_0-s)Bf(s)ds \in X$$

akkor $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{\mathrm{DS}}$.

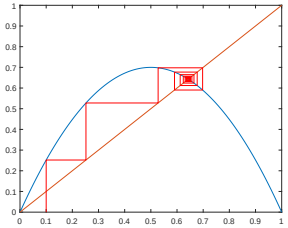


Különbségek az előző perturbációhoz képest

- most $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$ operátorok helyett $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$ operátorokat fogunk tekinteni;
- Az absztrakt Volterra-operátor definíciója most

$$(V_B^* F)(t) : \mathcal{X}_{t_0} \to \mathcal{X}_{t_0}, \quad (V_B^* F)(t) := \int_0^t F(s) B T(t-s) ds \ \in \mathcal{L}(X_1, X);$$

- Most az integrál az X_1 Banach-téren konvergál pontonként.



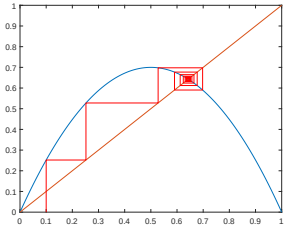
$\mathcal{S}_{t_0}^{\mathrm{MV}}$ definíciója

Megint listázzuk a szükséges tulajdonságokat, majd egy halmazba gyűjtjük az ezeket teljesítő operátorokat: Tetszőleges $F \in \mathcal{X}_{t_0}$ választással

1. A $(V_B^* F)(t) : X_1 \subset X \to X$ operátor kiterjeszthető $\overline{(V_B^* F)(t)} : X \to X$ korlátos operátorrá;
2. $[0, t_0] \ni t \mapsto \overline{(V_B^* F)(t)}$ leképezés erősen folytonos X téren;
3. $\overline{V_B^*}$ korlátos operátor $\mathcal{X}_{t_0}$-on, sőt, $\left\|\overline{V_B^*}\right\| < 1$.

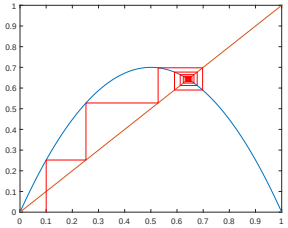
Definíció. Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow (T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X Banach-tér felett. Ekkor legyen

$$\mathcal{S}_{t_0}^{\mathrm{MV}} := \left\{ B \in \mathcal{L}(X_1, X) : \overline{V_B^*} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_{t_0}), \left\|\overline{V_B^*}\right\| < 1 \right\}.$$



Analóg tétel

Tétel. Megfelelő $A, (T(t))_{t\geq 0}, X$ esetén ha valamilyen $t_0 > 0$ szám esetén $B \in \mathcal{S}^{\mathrm{MV}}_{t_0}$, akkor az $(A+B, \mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A))$ operátor egy erősen folytonos félcsoport generátora X-en.



A generált félcsoport előállítása, II.

Következmény. Ha a fenti tételben $(A+B) \rightsquigarrow (S(t))_{t\geq 0}$, akkor érvényes

a) a konstansvariációs formula, vagyis tetszőleges $t \geq 0$ mellett (pontonként):

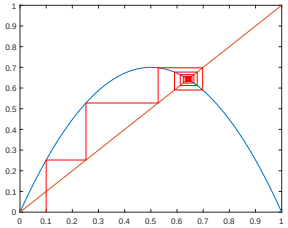
$$S(t) = T(t) + \int_0^t S(x)BT_{-1}(t-s)ds;$$

b) a Dyson-Philips-sorelőállítás: ha $S_0(t) = T(t)$ és

$$S_{n+1}(t) = \overline{V_B^*}S_n(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)BS_n(s)ds,$$

akkor

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) \quad \forall\ t \in [0, t_0]\,.$$



A Miyadera-Voigt-feltétel

Állítás Legyen $(A, \mathcal{D}(A)) \rightsquigarrow$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-tér felett, $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$ olyan, hogy valamilyen $q \in [1, 0)$ kontrakciós állandóval fennáll az alábbi becslés:

$$\int_0^{t_0} \|BT(s)x\| \, ds \leq q \, \|x\| \quad \forall \, x \in \mathcal{D}(A).$$

Ekkor $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{\mathrm{MV}}$, azaz $A + B$ egy erősen folytonos félcsoport generátora X-en.

[1] Engel, K.-J. and Nagel, R.: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. (2000).